

Козлова Дарья

207 группа

Теория функций
комплексной переменной

МФКП

1. Теория функций комплексной переменной, Тихонов
2. Краткий курс теории аналитических функций, Маркушевич

I комплексные числа и действия с ними

$$z = (a, b), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$a = \operatorname{Re} z \quad b = \operatorname{Im} z$$

Сложение: $z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

Умножение: $w = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$

$i = (0, 1)$ — мнимая единица

$$i = -j \Rightarrow z = (0, b) = ib \quad \bar{z} = (a, b) = a + ib$$

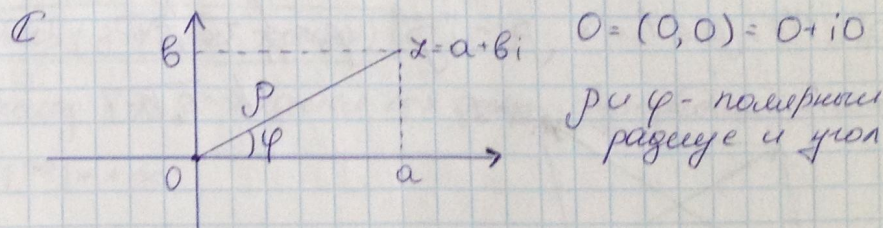
Спряжение: $\bar{z} = a - ib$ и $z = a + ib$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\bar{z}^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} \text{ — обратное к } z$$

Комплексная плоскость:



$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ — модуль числа}$$

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2k\pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2$$

Рассмотрим основные интервалы $[0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi]$

Главное значение аргумента $\operatorname{Arg} z$ — значение $\operatorname{Arg} z$, принадлежащее в основной интервал

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$z = \rho e^{i\varphi}$ — Показательная форма

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi \equiv \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \pmod{2\pi}$$

Формула Муавра:

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi} \quad n \in \mathbb{Z}$$

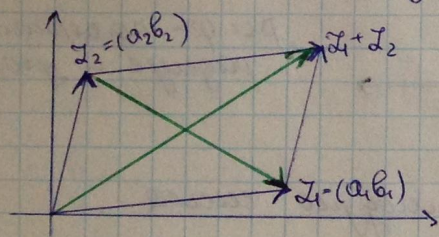
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\varphi} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$z_0 = \rho e^{i\varphi_0}$ — n -й степень корня, если

$$z_0^n = z$$

$$\rho_0^n e^{in\varphi_0} = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \rho_0 = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_0 = \frac{\varphi}{n} + 2 \frac{k}{n} \pi$$

$$k=0, n-1$$



<https://moodle.cs.msu.ru>

Множества: $|z-a| = r$
 $|z-a| \leq r$
 $|z-a| > r$

Раздел: Предел последовательности

$$z_n = a_n + ib_n$$

$$z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad |z_0 - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$|z_0 - z_n|^2 < \varepsilon^2$$

$$|a_0 - a_n|^2 + |b_0 - b_n|^2 < \varepsilon^2$$

Лемма 1.1 $\lim z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim a_n = a_0$ и $\lim b_n = b_0$

Лемма 1.2 (Т. Больцано-Вейерштрасса)

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Опр Последовательность ограничена, если $\exists M > 0: |z_n| \leq M \quad \forall n$

Опр Последовательность $\{z_n\}$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): |z_k - z_l| < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N$

Теорема 3 (крит. Коши)

Последовательность $\{z_n\}$ сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна

$$1. |\infty| = +\infty$$

$$2. \infty \pm a = a \pm \infty = \infty$$

$$3. \infty \cdot \alpha = \alpha \cdot \infty$$

$$4. a/\infty = 0$$

$$5. \infty/a = \infty$$

$$6. a/0 = \infty$$

7. Операции $\infty \pm \infty$ $0 \cdot \infty$ ∞/∞ $0/0$ не имеют смысла

Опр. Область - открытое, связное множество

Расстояние от z до множества M :

$$\rho(z, M) = \inf_{z \in M} |z_0 - z|$$

3. Если z_0 - пред. точка мн-ва M , то $\rho(z_0, M) = 0$

2. M -замкн. мн-во и $z \notin M$, тогда $\rho(z, M) > 0$

Расстояние между мн-ми M_1 и M_2

$$\rho(M_1, M_2) = \inf_{\substack{z_1 \in M_1 \\ z_2 \in M_2}} |z_1 - z_2|$$

Лемма 4. Если мн-и M_1 и M_2 замкнуты и хотя бы одно из них ограничено. Если эти мн-и не пересекаются, то расстояние между ними имеет строго положительное значение.

$$(M_1 \cap M_2 = \emptyset \Rightarrow \rho(M_1, M_2) > 0)$$

Раздел Функции комплексного переменного

E - произв. подмножество комплексной плоскости и каждой $x \in E$ поставим в соответствие одно или несколько чисел a . В этом случае говорят, что на E задана функция комплексного переменного x .

$$a = f(x)$$

Рассмотрим только однозначные ф-ции (пока)

Однозначные ф-ции: $\operatorname{Re} x$, $\operatorname{Im} x$, $|x|$, $a \exp x$

Мнозначные ф-ции: $\sqrt{x}$, $\operatorname{Arg} x$

Предел функции в точке

$E \subset \mathbb{C}$ и f и x_0 - предельная точка для E .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad x \in E \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Теорема Комплексное соотношение

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

равносильно для вещественного предельного соотношения

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = B$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = C$$

Лемма Вейля Если $g(z)$ и $h(z)$ окр. окр. на $E \Rightarrow$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A_1 \quad \lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = A_2$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} (g(z) \pm h(z)) = A_1 \pm A_2$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) h(z) = A_1 A_2$$

Непрерывность. Раздел

$E \subset \text{dom } f(z)$, z_0 - предельная точка гл. E ; $z_0 \in E$

$\Rightarrow f(z_0)$ определено

$f(z)$ непр в т. z_0 , если $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

$f(z)$ непр на E , если $f(z)$ непрерывна в каждой точке $z_0 \in E$

$$z_0 = x_0 + i y_0$$

$$z = x + i y$$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$\text{Теор. 2.2. } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0) \end{cases}$$

Следствие теор. 2.2.

1° Если f, g непр в т. z_0 , то; $f \neq g$, $f g$ так непр в точке z_0 .
Если $g(z_0) \neq 0 \Rightarrow f/g$ непр в z_0

2° $\exists w = f(z)$ непр в т. z_0 , то $w_0 = f(z_0)$. $\exists w_0 \in \text{множ } F \subset \text{dom } g$

$G = g(w)$, $g(w)$ непр в т. w_0 . Тогда $G = g(f(z)) = G(z)$ непр в точке z_0 .

• E - компакт на $\mathbb{C}$; $f(z)$ непр на E

3° Первая теор. Вейерштрасса

$f(z)$ ограничена на E , т.е. $\exists M > 0 \quad |f(z)| \leq M \quad \forall z \in E$

4° $|f(z)|$ достигает на E своего $\sup$ и $\inf$

5° (теор. Кантора)

Если $f(z)$ равномерно непр на E

$z = j(t)$, если $j(t)$ непр на E то говорят, что j задает непрерывную кривую (линию, путь), а запись $z = j(t)$ наз. параметр. уравнение кривой j

$$t \in E = [a, b] \in \mathbb{R}$$

Пример кривой: $z = a \cos t + b \sin t \quad t \in [a, b]$
 $x + i y$

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

Раздел. Дифференцируемость

$E \subset \text{dom } f(z)$, z_0 предельная точка гл. E , $z_0 \in E$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = \frac{df}{dz} \frac{df}{dz}(z_0)$$

$$\exists \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in E}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'_E(z_0) \text{ - по направлению } E$$

$$\exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$$

$$\frac{f(z) - f(z_0) = \Delta f}{z - z_0 = \Delta z}$$

$f(z)$ диф-ма в z_0

$$f'(z_0) = \frac{\Delta f}{\Delta z} + \varepsilon(z, z_0) \text{ Для точек близких к } z_0$$

$$\Delta f = f'(z_0) \Delta z + \varepsilon(z, z_0) \Delta z$$

$$\Delta f = A \Delta z + \varepsilon(z, z_0) \Delta z$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = A + \varepsilon(z, z_0)$$

$$\Delta z \rightarrow 0 \rightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = A = f'(z_0)$$

Упр 2.3 $f(z)$ диф-ма в $z_0 \iff$ для z близких к z_0 Δf можно представить в виде:

$$\Delta f = A \Delta z + \varepsilon(z, z_0) \Delta z, \text{ где}$$

A - константа

ε - б. малая при $\Delta z \rightarrow 0$

Упр 2.4 (условие Коши-Римана)

$\exists f(z)$ определена в обл E ($f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$)
 $f(z)$ диф-ма в $z_0 = x_0 + i y_0 \in E \iff$
 $v(x, y)$ и $u(x, y)$ диф-мы как ф-ции

от $\mathbb{R}$ переменных x, y в $z_0(x_0, y_0) \in E$ и
 u'_x, u'_y, v'_x, v'_y связаны условиями Коши-Римана

$$(CR) u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) \quad u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0)$$

$$\text{Фок-во: } \Rightarrow \exists f'(z_0) = a + i b$$

$$\Delta f = f'(z_0) \Delta z + \varepsilon \Delta z$$

$$\Delta z = \Delta x + i \Delta y; \quad f = u + i v$$

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i \varepsilon_2$$

$$\Delta u = a \Delta x - b \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\Delta v = b \Delta x + a \Delta y + \varepsilon_2 \Delta x + \varepsilon_1 \Delta y$$

$$a = u'_x(x_0, y_0) \quad -b = u'_y(x_0, y_0)$$

$$b = v'_x(x_0, y_0) \quad a = v'_y(x_0, y_0)$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta u = a \Delta x - b \Delta y + \alpha |\Delta z| \quad \alpha \rightarrow 0 \quad \Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta v = b \Delta x + a \Delta y + \beta |\Delta z| \quad \beta \rightarrow 0 \quad \Delta z \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v = (a + i b)(\Delta x + i \Delta y) + (\alpha + i \beta) |\Delta z| = A \Delta z + \varepsilon \Delta z \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{(\alpha + i \beta) |\Delta z|}{\Delta z}$$

$$|\varepsilon| = |\alpha + i \beta| \rightarrow 0 \text{ при } \Delta z \rightarrow 0$$

$$f \text{ диф. в } z_0 \quad A = f'(z_0)$$

Следствие: $f'(z_0) = A = a + ib = u'_x + i v'_x =$
 $= v'_y - i u'_y = u'_x - i u'_y = v'_y + i v'_x$

Р-ция $f(z)$ аналитическая в обл. M , или
 $f(z)$ диф-на в каждой точке $z_0 \in G$

Аналитическое отр + $f'(z)$ непрерывна в обл. G

Пример: $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y) = u + iv$
 $z = x + iy$

$u(x, y) = e^x \cos y \quad v(x, y) = e^x \sin y$

$u'_x = e^x \cos y = v'_y = e^x \cos y$

$u'_y = -e^x \sin y = v'_x = e^x \sin y$

$f'(z) = u'_x + i v'_x = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$f(z)$ аналитич во всей $\mathbb{C}$

Целая (аналитич) ф-ция - ф-ция аналитич на всей $\mathbb{C}$

$f(z)$ - показат. ф-ция от z

С-ва аналитических ф-ций

$C(E)$ мн-во ф-ций непр на E

$A(E)$ мн-во аналит. ф-ций

1 Если $f(z) \in A(G)$, то и поделен $f(z) \in C(G)$

2 Если $f, g \in A(G) \Rightarrow f \pm g \in A(G)$

3. Мюр (об образе области) Open mapping theorem

$\exists f(z) \in A(G), f(z) \neq \text{const}$, то образ области
 $D = f(G)$ - тоже является областью

4. Аналитичность сложной ф-ции

$\exists f(z) \in A(G), f(z) \neq \text{const}, \exists f = f(G), \exists G = g(w) \in A(f)$

Тогда $h = g(f(z)) = H(z) \in A(G)$ и

$H'(z) = f'(z) g'(w) \quad w = f(z)$

5. Аналитичность обратной ф-ции

$\exists f(z) \in A(G)$ и $f'(z_0) \neq 0 \quad z_0 \in G$

$\exists w_0 = f(z_0)$ Тогда $\exists$ окр-ть $K_\varepsilon(w_0)$ и w_0 и $z = \varphi(w)$
 определенная в окр-ти $K_\varepsilon(w_0)$ так же, что

1) $f(\varphi(w)) = w \quad \forall w \in K_\varepsilon(w_0)$

2) $\varphi \in A(K_\varepsilon(w_0))$

3) $\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$

6. Ортогональность линий уровня

$\exists f(z) \in A(G) \quad f(z) \neq \text{const} \quad f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

$u(x, y) = C \quad v(x, y) = D \quad z \in G$

$f(z_0) = u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) \quad \left. \begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) \\ v(x, y) &= v(x_0, y_0) \end{aligned} \right\} \varphi =$

= взаимно ортогональные семейства кривых

$$\bar{n}_1 = \{u'_x, u'_y\}, \quad \bar{n}_2 = \{v'_x, v'_y\} \text{ нормали}$$

$$\cos(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| |\bar{n}_2|}; \quad (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = u'_x v'_x + u'_y v'_y =$$

$$= \begin{cases} \text{касаясь-Римана } \gamma = -u'_x u'_y + u'_y u'_x = 0 \Rightarrow \cos = 0 \Rightarrow \\ \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \end{cases}$$

Геометрический смысл производных (аргумента производных)

$w = f(z)$, кот в т $z_0 \exists f'(z_0) \neq 0$

$\text{Arg } f'(z)$

$\exists$ непрерывная кривая с параметр др-шес $z = \lambda(t)$ $t \in E = [a, b] \subset \mathbb{R}$. В каком случае ф-ция λ имеет производную в т. $t_0 \in E$?

Положим $\lambda(t) = x(t) + iy(t)$ и

$$\frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{t - t_0} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + i \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}$$

при $t \rightarrow t_0$ $t \in E$ получим:

Производная $\lambda'(t_0) \exists \Leftrightarrow$ когда $\exists$ обе веществ. производные $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$. При этом

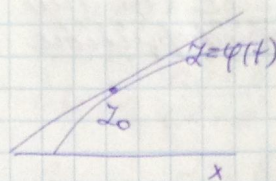
$$\lambda'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

Значение параметра t_0 и $z_0 = \lambda(t_0)$ наз регу-лярными если производная $\lambda'(t_0) \exists$ и $\neq 0$

Если t_0 -регулярное знач. параметра, то для всех $t \in E$ достаточно близких к t_0 и $\neq t_0$

точка $z = \lambda(t)$ на кривой L описана от $z_0 = \lambda(t_0)$ на т.ч.

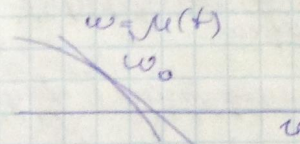
$$\frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{t - t_0} = \frac{z - z_0}{t - t_0}$$



$$t \in E = [a, b]$$

$$z_0 = \varphi(t_0)$$

$$\varphi'(t_0) \neq 0$$



$$w_0 = f(z_0)$$

$$w = f[\varphi(t)] = \mu(t)$$

$$t \in E = [a, b]$$

$$w_0 = f(z_0) = f(\varphi(t_0)) = \mu(t_0)$$

$$\mu'(t_0) = \varphi'(t_0) f'(z_0) \neq 0$$

$$\text{Arg } \mu'(t_0) = \text{Arg } \varphi'(t_0) + \text{Arg } f'(z_0)$$

можно арг

$$\text{Arg } \mu'(t_0) = \text{Arg } \varphi'(t_0) = \text{arg } f'(z_0)$$

Опр. Конформное отображение. Отображение заведомо непрерывной ф-ции $w = f(z)$ - конформное в т. z_0 если оно сохраняет угол между касательными кривыми, проходящими через z_0

Теор 2.5 (достаточные условия конформности)

Если $f'(z_0) \exists$ и $\neq 0$ то отображение $w = f(z)$ - конформно в z_0

$$G \xrightarrow{f} D$$

(Глобальная конформность) Соответствие между областями G и D устанавливаемое лев. ф-цией f наз конформным если оно

взаимнооднозначно (1 в 1) с локально конформно в каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}$

3. Элементарные аналитические ф-ции и соответствующие им конформные отображения

Целые линейные ф-ции

$w = L(z) = dz + b$ $d \neq 0$ $\text{dom } L = \mathbb{C}$ $\text{im } L = \mathbb{C}$
т.к. при $\neq w$ ур. $w = dz + b$ разрешим относительно z , т.е. $\forall w \in \mathbb{C}$ имеет прообраз z , $z \in \mathbb{C}$ имеет прообраз z

$$L'(z) = d \neq 0 \quad \forall z \quad (\text{Слауго})$$

Фракно линейные ф-ции

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

При этом $\Delta = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ анал. ф-ции L

При $c=0$ г/ние ф-ции в целую линей ф-цию

Умножив на $d \neq 0 \Rightarrow w = L(z) = \frac{(d/c)z + d/c}{(d/c)z + d/c} \quad \Delta = d^2 \neq 0$

Следствие: Для всякой фракно. л.и. ф-ции можно выбрать представление с $\det = 1$

(Решит. взять $J = \frac{1}{d^2}$)

$$L_1(z) \xrightarrow{A_1} L_2(z) \xrightarrow{A_2} L(z) = L_2(L_1(z)) \text{ тогда фракно}$$

линейная ф-ция
(узкая, рассмотрим матрицу = произведению матриц)

$$A = A_2 A_1$$

$\bar{I}(z) = z$ тождественная, единичная =

$$= \frac{1z+0}{0z+1} \quad \bar{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \det L = 1$$

$$\hat{L}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A\bar{A} = \bar{A}A = \bar{I}_2$$

$$\hat{L}L = L\hat{L} = \bar{I}(z)$$

Фракно линейные ф-ции образуют (некоммут.) группу по отношению к операции композиции. Эта группа изоморфна группе $SL_2(\mathbb{C})$ Special linear group группа Мёбиуса

Конформность:

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad c \neq 0 \quad \Delta = \det A = 1$$

$$\delta = -\frac{d}{c} \text{ - особая т. ф. } L$$

$$\text{dom } L = \mathbb{C} \setminus \delta$$

$$\bar{L} = \bar{L}^{-1}$$

$$\text{im } L = \text{dom } \bar{L}^{-1} = \mathbb{C} \setminus w + \frac{a}{c}y$$

$$\bar{L}'(w) = \frac{dw-b}{cw+a}$$

$$L'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+d)}{(cz+d)^2} = \frac{\Delta}{(cz+d)^2} \neq 0$$

$L(z)$ аналитическая в своей области определения

Локальные конформности вероду в области определения

$$\text{dom } L \xrightarrow[\text{конф}]{} \text{im } L$$

$$z \rightarrow \delta \quad L(z) \rightarrow \infty$$

$$z \rightarrow \infty \quad L(z) \rightarrow \frac{a}{c}$$

$$\bar{L}(z) \Leftrightarrow \bar{L}(w)$$

$$\cdot z = \delta \quad w = \frac{1}{\bar{c}}$$

$$G = \frac{cz+d}{az+b} = \tilde{L}(z) \quad \tilde{L}(\delta) \neq 0$$

$$\cdot z = \infty \quad \tilde{z} = \frac{1}{\tilde{z}}$$

$$w = \frac{a\tilde{z}+b}{c\tilde{z}+d} = \frac{b\tilde{z}+a}{d\tilde{z}+c} \quad L'(0) \neq 0$$

$$\bar{L} \xrightarrow[\text{конф}]{} \bar{L}$$

Если $w = f(z)$ отображает $\mathbb{C}$ конформно на себя, то f гомоморфизм

$$\text{Неподвижные точки: } z = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0 \quad c \neq 0$$

Всегда г/м ф-ция имеет не более 2х

неподвижных точек

$$I(z) = z$$

Всегда мн ф-ция (г/м, унм), кроме ф-ция $I(z)$ имеет не более 2х неподвижных точек.

Теор. 3.1 I, L - г/м ф-ция:

$$L(z_1) = L(z_2) \quad (3.1)$$

где 3х попарно различных точек z_1, z_2, z_3 тогда

$$L(z) = L(z)$$

Док: $U = L^{-1}L$ г/м ф.

$$\text{Рав-ва (3.1)} \sim U(z_1) = z_1 \Rightarrow i = \bar{1}, \bar{3}$$

$$U(z) = I(z) \sim I(z) = L(z)$$

Инвариантность ρ_{00} относительно

Задача 3.1

Даны 2 тройки попарно различных и конечных чисел (z_1, z_2, z_3) и (w_1, w_2, w_3)

Найти г/м ф-цию $w = w(z): L(z_i) = w_i, i = \bar{1}, \bar{3}$ (3.2)

$$\frac{w_1 - w}{w_2 - w} : \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} : \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \quad (3.3)$$

Проверить что (3.3) определяет w как гомоморфизм ф-цию от z

1 дана четверка a, b, c, d попарно различных конечных чисел

$$(abcd) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

наз. двойным отношением точек a, b, c, d

Решение задачи 3.1 сохраняет это отношение для всякой 4-ки (z_1, z_2, z_3, z)

$$(w_1, w_2, w_3, w) = (z_1, z_2, z_3, z)$$

Мор 3.2 Двойное отношение есть инвариант относительно линейного преобразования

$\exists w = L(z)$ - произв. г/л ф-ция a, b, c, d - произв. попарно различных точек

$$L(a) = A, L(b) = B, L(c) = C, L(d) = D$$

$$\text{Мор } (a, b, c, d) = (A, B, C, D)$$

Док: Будем рассматривать $L(z)$ как решение задачи (3.1) для точек (a, b, c, d) и (A, B, C, D)

Мор по ф-ле (3.3)

$$\frac{w-A}{w-B} \cdot \frac{D-A}{D-B} = \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{d-a}{d-b} \quad (*)$$

$L(c) = C$. Подставив (c, C) в $(*)$ получим

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d)$$

$$z_3 = \infty \quad (w_1, w_2, w_3, w) = \frac{z_1 - z}{z_2 - z}$$

$$w_1 = \infty \quad \frac{w_1 - w}{w_1 - w_2} : \frac{w_2 - w}{w_2 - w_3} = (z_1, z_2, z_3, z)$$

$$\frac{w_2 - w}{w_2 - w_3} = (z_1, z_2, z_3, z)$$

Круговое свойство

Мор 3.3 Под действием г/л ф-ции прямая или окружность переходит снова в прямую или окружность

$w = L(z)$ - г/л ф-ция z - прямая или окружность, $1 = L(j)$ - прямая или окружность

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0 \quad (3.4)$$

Если $A = 0$, но $B^2 + C^2 \neq 0$, то (3.4) задает прямую

$A \neq 0$, $B^2 + C^2 - AD > 0$, то (3.4) задает окр.

$$(x^2 + 2\frac{B}{A}x + \frac{B^2}{A^2}) + (y^2 + 2\frac{C}{A}y + \frac{C^2}{A^2}) = \frac{B^2 + C^2}{A^2} - \frac{D}{A} = \frac{B^2 + C^2 - AD}{A^2} = R^2 > 0$$

$$(x + \frac{B}{A})^2 + (y + \frac{C}{A})^2 = R^2$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$E = B + iC$$

$$A z \bar{z} + \bar{E} z + E \bar{z} + D = 0 \quad (3.5)$$

$A = 0$, $E \neq 0$ прямая

$A \neq 0$, $|E|^2 - AD > 0$ окр.

Док: Проверим утв. мор для спец. и общ. простейш. г/л ф-ции $w = \frac{1}{z}$
 z - произв. прямая или окр. на плоскости

Может Г-образ + под действием инверсии
задается ур.

$$A \frac{1}{w\bar{w}} + \bar{E} \frac{1}{w} + E \frac{1}{\bar{w}} + D = 0$$

$$\mathcal{D}w\bar{w} + Ew + \bar{E}\bar{w} + A = 0 \quad (3.6)$$

$\cancel{A=0} \rightarrow \cancel{A \neq 0} \Rightarrow \cancel{E \neq 0} \times \cancel{B^2 \neq 0}$ impossible
 $\cancel{A \neq 0} \rightarrow \cancel{A=0} \times \cancel{E \neq 0} \times \cancel{A \neq 0} \times \cancel{E^2}$ ok
 $\cancel{A \neq 0} \rightarrow \cancel{A=0} \times \cancel{E \neq 0} \times \cancel{A \neq 0} \times \cancel{E^2}$ ok

$$D=0 \begin{cases} A=0 & E \neq 0 \text{ nprilicne} \\ A \neq 0 & |E|^2 - AD > 0 \quad |E|^2 > 0 \sim E \neq 0 \\ & \text{nprilicne} \end{cases}$$

$\rho \neq 0$ — $A=0 \quad E \neq 0 \quad |E|^2 - AD = |E|^2 > 0$ окр.-гб
 $\rho \neq 0$ — $A \neq 0 \quad |E|^2 - AD > 0$ окр.-мб

$$w = L(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)} = \frac{a}{c} + \frac{-1}{c(cx+d)}$$

$$W = \frac{1}{\alpha} = \mathcal{L}(\alpha)$$

$$\mathcal{L}_1 = L_1(\alpha) = c\alpha + d$$

$$Z_2 = -L(Z_1) = \frac{1}{Z_1} \quad W = L_2(\alpha_2) = \frac{\alpha_2}{c} = \frac{1}{c} Z_2$$

$L_2 \perp L_1(x) = L(x) \Rightarrow$ круговое в-во вогнутое
функции L

круговое с-во доказано $\square$

$$u = L(\alpha)$$

$$L(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad c \neq 0 \quad D = -\frac{d}{c}$$

- γ - Прямую смысле, γ проходит через γ
Голубиность - итак

8 произвольная область на плоскости & одного из
3х типов: полюс, открытый круг,
внешность замкнутого круга

6 - " - " - w - " - " - " - " - " - " - "

Множество Γ графов. елем. ϕ -услов $\omega = L(z)$ $\phi \xrightarrow{\text{graph}} G$

5. Выбрать точки z_1, z_2, z_3 на $\gamma = \partial \mathcal{D}$ с учетом
положит. направл. обхода

2. $w_1, w_2, w_3 \in \sqrt{B} = \mathcal{B} - \dots$

3 Построить $L(x)$ как реш. задачи 3, где три
 x_1, x_2, x_3 и u_1, u_2, u_3

$$L(x_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad f \rightarrow f \quad g \rightarrow g$$

Творения 24 | (Сохранение семейности)

§ $w = L(x)$ произв. дробн. лин. ф-ции & произв. преобраз. шев. окружностей на плоск. x .

т. z_1 и z_2 симметричны относительно Γ . Положим $w_1 = L(z_1)$, $w_2 = L(z_2)$, $\Gamma = L(\gamma)$. Тогда w_1 и w_2 симметричны относительно Γ .

Пред. Могло бы z_1 и z_2 симметричны относительно окруж. или прямой и Γ окруж. проходящий через z_1 и z_2 ортогонально к Γ .

Задача $\gamma: z = a + Re^{i\varphi}$
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
 $z_2 = a + \frac{R^2}{z_1 - a}$

Можно симметричны с центром окруж. и прямой ∞

Док-во. $\Gamma \Delta$ прямая или окруж. проходящая через w_1 и w_2 и $\Gamma \perp \delta = L^{-1}(\Delta)$

δ - прямая или окруж. на п.п. z , проходящая через z_1 и z_2

По условию симметричны $\delta \perp \Gamma \xrightarrow{\text{конф.}} \Delta \perp \Gamma \Rightarrow w_1$ и w_2 симметричны относительно Γ

Задача: найти дробно-линейную ф-цию $w = L(z)$ отображающую круг $|z| \leq R$ в круг $|w| \leq R$ так чтобы заданная точка z исходного круга перешла в $w_0 = 0$

1. $z = 0 \Rightarrow 0 \rightarrow 0$
 $\infty \rightarrow \infty$

$w = \beta z$

$w = e^{i\varphi} z$ $\varphi \in [0, 2\pi)$
 $|\beta| = 1$
 $\beta = e^{i\varphi}$

2. $z \neq 0$
 $L^* = \frac{R^2}{z}$

$z \rightarrow 0$

$z^* \rightarrow \infty$

$w = L \frac{z - a}{z - a^*}$

$z_2 = a + \frac{R^2}{z_1 - a}$

$w = L \frac{z - a}{z - a^*} = L \frac{z - a}{z - \frac{R^2}{z - a}} = \frac{L(z - a)}{L \frac{z^2 - az - R^2}{z - a}} = \frac{L(z - a)^2}{L(z^2 - az - R^2)}$

$z = Re^{i\varphi}$

$|w| = |L| \frac{|z - a|}{|R^2 - \bar{a}z|} = |L| \frac{|Re^{i\varphi} - a|}{|R^2 - \bar{a}Re^{i\varphi}|} = \frac{|L| |R - \bar{a}e^{i\varphi}|}{R |R - \bar{a}e^{i\varphi}|}$

$= \frac{|L|}{R}$ $|L| = R^2$ $L = R^2 e^{i\psi}$
 $w = R^2 e^{i\psi} \frac{z - a}{R^2 - \bar{a}z}$

Задача: Найти все д/ли. ф-ции преобразов. отображ. верх. полуплоскости $\text{Im } z > 0$ в круг $|w| < 1$

Ф-ция Мухоморова

$w = L(z) = \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

$\text{dom } L = \{z \neq 0\}$ $L'(z) = \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$

$L(z)$ аналит. ветвь криво $z = 0$

$L'(z) \neq 0 \sim z \neq \pm 1$ локальная конформность

Задача: Проверить, что конформность отсутствует

в т $z = \pm 1$ (не сохраняется угол)

$$\operatorname{Im} w = 0$$

$$w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \sim z^2 - 2zw + 1 = 0$$

$$z_1 z_2 = 1$$

Аналог. Если $f(z) \in A(y)$ при $z_1, z_2 \in g$ $z_1 + z_2 = 0$
 $w_1 = f(z_1) \neq w_2 = f(z_2)$. Тогда говорят, что
 $f(z)$ однозначна в обл g , в противном
 случае говорят, что ф-ция многозначна
 Если f многозначна в g , но однозначна
 в $h \subset g$, то говорят, что h есть область $\mathbb{D}$ -лист-
 ности ф-ции

$|z| < 1$ $|z| > 1$ - области однозначности

Верхняя и нижняя полуплоскости - области однозначности

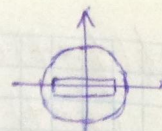
$$\gamma_z: z = r(\cos t + i \sin t) \quad 0 \leq r < 1 \quad 0 \leq t < 2\pi$$

круг $\rightarrow$ окружность

$$\gamma_z: w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{r} + r)\cos t - i(\frac{1}{r} - r)\sin t$$

$u = a \cos t$
 $v = b \sin t$

$z \rightarrow 0$ плне коэф. увеличив
 $z \rightarrow 1 \quad a \rightarrow 1 \quad b \rightarrow 0$



$$\gamma: \{w \notin [-1, 1]\}$$

γ - плоскость перем. w с вырезом $[-1, 1]$

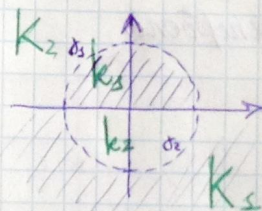
$$f(z) = f(\frac{1}{z}) \quad f(0) = \infty = f(\infty)$$

$$k: |z| > 1 \xrightarrow{\text{коэф.}} \gamma$$

$$k_1: |z| < 1 \quad \operatorname{Im} z > 0 \xrightarrow{\text{коэф.}} \operatorname{Im} w < 0$$

$$k_1: |z| > 1 \quad \operatorname{Im} z < 0 \rightarrow$$

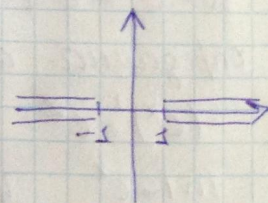
$$k_2: \xrightarrow{f(z)} \operatorname{Im} w > 0$$



Верхняя полуплоскость

$$\operatorname{Im} z > 0 = k_1 \cup k_2 \cup \gamma_1$$

$$\operatorname{Im} z > 0 \xrightarrow{\text{коэф.}} \{w \notin (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$$



$$\gamma_z: z = t(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad 0 \leq t < 1$$

$0 < \alpha < \pi/2$

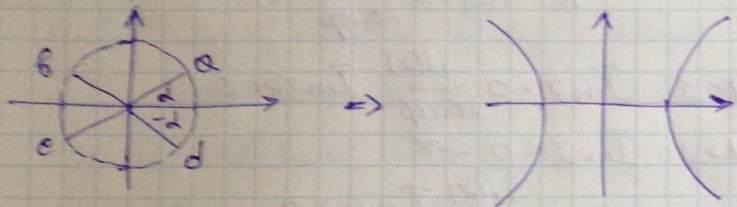
$$R_\alpha: f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{t} + t)\cos \alpha - i(\frac{1}{t} - t)\sin \alpha$$

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + t \right) \cos d$$

$$v = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - t \right) \sin d$$

$$\frac{u^2}{\cos^2 d} = \frac{1}{4} \left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \right) \quad \frac{v^2}{\sin^2 d} = \frac{1}{4} \left(t^2 + \frac{1}{t^2} - 2 \right)$$

$$\frac{u^2}{\cos^2 d} - \frac{v^2}{\sin^2 d} = 1$$



$$c = \overline{a^2 + b^2} = 1$$

$$w_1 = -1 \quad w_2 = 1$$

софокусные гиперболы

Показательная функция

$$z = x + iy$$

$$w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = \exp(z)$$

определена, аналитична во всей комплексной плоскости.

$$(e^z)' = e^z$$

$$|w| = e^x \quad y = \operatorname{Arg} w$$

$$0 \leq \operatorname{Im} e^z$$

e^z периодическая функция

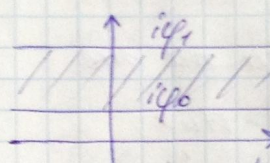
$$\tilde{z} = z + 2\pi i = x + i(y + 2\pi)$$

$$e^{iz} = e^z \quad \operatorname{Im} e^z = 2w \neq 0 \quad e^z = w \quad z = x + iy$$

$$|e^z| = e^x = |w|$$

$$x = \ln |w| \quad y \in \operatorname{Arg} w$$

$$z = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w$$



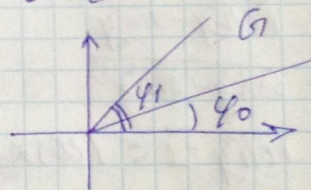
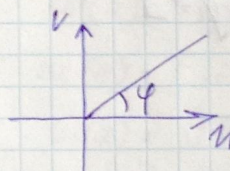
$$\varphi_1 - \varphi_0 \leq 2\pi$$

$\mathcal{G}$ - область однозначности

$$e^z = e^{t+iy} = e^t (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

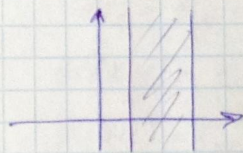
$$-\infty < t < +\infty$$

$$0 < e^t < \infty$$



$$\operatorname{Arg} w = \varphi_0 + 2\pi k$$

$$\operatorname{Arg} w = \varphi_1 + 2\pi l$$



→ многозначные окружности

Задача Показать, что прямая на пл. z не параллельна координатным осям отображена эквив. в логарифмическом спираль $\rho = Ce^{k\varphi}$

Тригонометрические и гиперболические

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

период 2π

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Первый зот

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

Ученое
Анализировать.

Для всех на всех. все др-ые не не

$$e^{ix} = e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\sin x = \operatorname{sh} ix$$

$$e^{-ix} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$x = x + 0 \cdot i$$

$$|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 y}$$

$$\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$$

$$|\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}$$

$$|\operatorname{sh} y| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} \leq |\cos z| \leq \operatorname{ch} y$$

$$|\operatorname{sh} y| \leq |\sin z| \leq \operatorname{ch} y$$

$$\operatorname{ch}' z = \operatorname{sh} z$$

$$\cos^2 z = -\sin^2 z$$

Первообразные и интеграл

Доп: $\exists f(z) \in C(G)$ Ф-ция $F(z) \in A(G)$ наз. первообразной ф-ции f области G если

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G$$

Совокупность всех первообразных $f(z)$ в G для f наз. интегральное f в этой области

$$P(z) = F(z) + C$$

$$\text{Пусть } F'(z) = f(z)$$

$$\text{Произв } P'(z) = f(z)$$

$$W(z) = F(z) - P(z)$$

$$W'(z) = F'(z) - P'(z) \equiv 0 \text{ в } G$$

$$W(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0 \quad \forall (x, y) \in G$$

$$u(x, y) = C_1 \text{ в } G \quad y \Rightarrow C_1 + i C_2 = 0$$

$$v(x, y) = C_2 \text{ в } G$$

$$F(z) - P(z) = 0 \quad \text{Далее считаем}$$

$$\exists f(z) \in C(G)$$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$\int_L f(z) dz = \int_L u dx - v dy + i \int_L v dx + u dy \quad (*)$$

След. условие эквивалентно:

C-свойства:

$$1. \oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

2. Если $m, z_1 \in G$ тогда $F(z) = \int_{z_1}^z f(z_1) dz_1$ не зависит от выбора пути z_1 соединяющих z и z_1

3. $\exists U(x, y)$ и $V(x, y)$ непрерывны в G и:

$$dU = u dx - v dy$$

$$dV = v dx + u dy$$

Мор (операторы)

$\exists f(z) \in C(G)$ и обладаем в G C-свойствами
Мор:

$$1. F(z) = \int_{z_1}^z f(z_1) dz_1 \in A(G)$$

$$2. F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G$$

Доказ. Применим $\odot$ к $F(z)$

$$\int_{z_1}^z f(z) dz = \int_{z_1}^z u dz - v dy + i \int_{z_1}^z v dz + u dy =$$

$$= U(x, y) - U(x_1, y_1) + i [V(x, y) - V(x_1, y_1)]$$

Выберем U и V такие, чтобы $V(x, y) = U(x, y) = 0$

$$z = \xi + \eta$$

$$F_0 = U(x, y) + i V(x, y)$$

U и V непрерывны в G

$$U'_x = u$$

$$V'_x = v$$

$$-V'_y = u$$

$$V'_y = -v$$

$$U'_y = u$$

$$-U'_x = v$$

$$-V'_x = U'_y$$

$$U'_x = V'_y$$

Всп. улов. Коши
Рискоу

$\exists$ непрерывная $F'(z) \quad \forall z \in G \quad F(z) \in A(G)$

$$F'(z) = U'_x + i V'_x = u + iv = f(z) \quad \square$$

Замеч. G - односвязная и $f(z) \in A(G)$

Условие Мор выполнено если

$$\text{Существование } P(z) = \int_{z_1}^z f(z_1) dz_1 + C \quad (**)$$

Существование Положим $z = z_0$ в равенстве (**)

$$C = P(z_0) \quad (P - \text{функция Нильсона-Людвигса})$$

$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z - \text{многозначная функция}$$

Универсальные формулы Коши

1. $f(z) \in A(G)$ контур $L \subset G$, $\operatorname{int} L \subset G$

$z_0 \in \operatorname{int} L$ тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$



$$\delta_g: |z - z_0| = g \quad \delta_g \subset \text{int } L$$

δ_g — окружность с центром z_0 и радиусом g

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} \in A(D)$$

По теореме о существовании контура

$$\bar{I} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_g} g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_g} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_g} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = I_g$$

Покажем, что $I_g \rightarrow f(z_0)$ при $g \rightarrow 0$

$$\bar{I} = I_g = f(z_0) \quad \forall g$$

$$\oint_{\delta_g} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \quad \left| \begin{array}{l} \times f(z_0) \\ / 2\pi i \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_g} \frac{f(z_0) dz}{z - z_0} = f(z_0)$$

$$|I_g - f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_g} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_g} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left| \oint_{\delta_g} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \delta_g} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

$$\max_{z \in \delta_g} |f(z) - f(z_0)| \xrightarrow{g \rightarrow 0} 0$$

Замечание: Если δ достаточно мало, то контур δ_g

L , и $f(z)$ аналитична в δ и непрерывна на границе, то формула Коши применима к контуру L в точке z_0 области δ .

Замечание: $L: |z - z_0| = R$

$$z = z_0 + Re^{i\varphi}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Или, зависящее от направления

$$\bar{I}(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

$$\bar{I}'_y = \int_a^b f'(x, y_0) dx$$

$$\bar{I}(z_1, z_n) = \int_L P(x, y, z_1, \dots, z_n) dx + Q(x, y, z_1, \dots, z_n) dy$$

$$P, Q: (x, y) \in L, a \leq x \leq b, y = 0$$

$$P, Q \in C(G)$$

$$P', Q' \in C(G)$$

$$\bar{I}'_{z_i}(z_1, \dots, z_n) = \int_L P'_{z_i}(\dots) dx + Q'_{z_i}(\dots) dy$$

$$F(z) = \int_L \varphi(z, \zeta) d\zeta$$

1. $\zeta \in L, z \in \delta$ для δ на пр. перес. L

2. где ∇ — функция $g(z, \zeta)$

$$\varphi(z, z) \in A(G)$$

3. $\varphi'_z(z, z)$ непрерывно по совокупности переменных

Теорема об интеграле с параметрами

Вспомогательные предположения 1-3. Тогда

$$1) F(z) \in A(G)$$

$$2) F'(z) = \int_L \varphi'_z(z, z) dz$$

$$\text{Доказательство: } F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

$$\varphi(z, z) = U(x, y, \xi, \eta) + iV(x, y, \xi, \eta)$$

$$z = x + iy, \quad z = \xi + i\eta$$

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \int_L U(x, y, \xi, \eta) d\xi - V(x, y, \xi, \eta) d\eta + i \int_L V(x, y, \xi, \eta) d\xi + U(x, y, \xi, \eta) d\eta$$

$\int_L U'_x U'_y V'_x V'_y$ непрерывно по всем переменным

$$V'_x(x, y) = \int_L U'_x d\xi - V'_x d\eta$$

$$V'_y(x, y) = \int_L U'_y d\xi - V'_y d\eta$$

$$V'_x(x, y) = -U'_y(x, y)$$

$$U'_y = U'_x(x, y)$$

конечно
Результат

U и V непрерывно связаны без учета констант Римана

$$F(z) \in A(G)$$

$$2) F'(z) = \int_L \varphi'_z(z, z) dz$$

$$F'(z) = U'_x + iV'_x = \int_L U'_x d\xi - V'_x d\eta + i \int_L V'_x d\xi + U'_x d\eta$$

$$\int_L \varphi'_z(z, z) dz = \int_L (U'_x + iV'_x)(d\xi + i d\eta) + \int_L (U'_x d\xi - V'_x d\eta) + i \int_L V'_x d\xi + U'_x d\eta$$

Теорема о бесконечном гомотетическом преобразовании

м. о бесконечном гомотетическом преобразовании: $\int f(z) \in A(G)$. Тогда в каждой точке $z \in G$ $f(z)$ имеет произвольную величину.

Доказательство: Пусть $m, z \in G$. Проведем контур L так, чтобы $L \subset G$, $\text{int } L \subset G$, $z \in \text{int } L$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Применение теоремы об интеграле с параметрами

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \quad (\text{касательная к контуру})$$

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi$$

$$f'''(z) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4} d\xi$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz$$

Следствие 1. $f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow f''(x) \rightarrow \dots$

где $f'(x) \neq$ производная
 $f''(x)$ как дер-ва $\rightarrow$
 непрерывна

Если $f(x) \in A(G)$, то и $f'(x) \in A(G)$

2. $\int f(x) \in C(G)$ и $f(x)$ имеет в G C -свойство. Тогда $f(x) \in A(G)$

Теор Морера

Док. Из условий теор Морера вытекает, что в $\text{окр}_x G$ $\exists$ первообр где $f(x)$

$$F(x) = \int_{z_0}^x f(x) dz \quad F(x) \in A(G) \text{ и } F'(x) = f(x)$$

то из условий, $f(x)$ аналит в G

Теор Лиувилля. Угловая ф-ция $f(z)$ окр. во всей $\mathbb{C}$, является константой

Док: Пусть $m, z_0 \in \mathbb{C}$ и рассмотрим окр.

$$C_R: |z - z_0| = R$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

По условию $\exists M > 0 \quad |f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2R} \max_{z \in C_R} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2} \cdot 2\pi R \leq \frac{M}{R}$$

При $R \rightarrow \infty$ получаем $f'(z_0) = 0$

Ввиду произвольности m, z_0 имеем

$$f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \rightarrow f(z) = \text{const} \quad \square$$

Следствие 1. Всякая многочлен $P(z)$ ненулевая в $\mathbb{C}$ имеет корни во $\mathbb{C}$ и корень

Док: Ан. противно. $\exists P(z)$ ком не имеет корней в $\mathbb{C}$. Тогда в $\mathbb{C}$ определена и

$$\text{есть аналитич } f(x) = 1/P(x) \text{ При этом}$$

$f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Из этого след, что $f(x)$ окр. во всей $\mathbb{C} \Rightarrow$ по Лиувиллю $f(x) = \text{const} \Rightarrow$ противоречие $\square$

3. Критерий аналитич. ф-ции

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow f(x) : \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$$

$$|f(x) - \sum_{n=1}^N u_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \text{ и } \forall x \in G$$

Признак Вейерштрасса

$\sum u_n(x)$ равномерно в $\text{окр}_x G$ сходится к функции $f(x)$ из $\mathbb{C}$

$$|u_n(x)| \leq C_n \quad \forall x \in G$$

$$\text{Тогда } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| \Rightarrow$$

Теор 5.1. $\sum u_n(x) \in \mathbb{C} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ и $\sum u_n(x) = f(x)$

Тогда: 1) $f(z) \in C(G)$

2) Если кривая $L \in G$, то возможно
последнее интегрирование

$$\int_L f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L u_n(z) dz$$

Опрег. Говорят, что $\sum u_n(z)$ сходится в G равномерно, если этот ряд сход. равномерно на компакте $K \subset G$

Лем. Вейерштрасса (о пределах аналит.)

1) $u_n(z) \in A(G)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) и ряд $\sum u_n$ сход. в G к ф-ции $f(z)$ нормально
Тогда:

1) $f(z) \in A(G)$

2) Ряд $\sum u_n(z)$ можно почленно диф +
интегр

$$f^{(k)}(z) = \sum u_n^{(k)}(z) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

3) Все предель. предг. сход в G нормально

Дал. покажем, что $f(z) \in A(K_R(z))$, где z произв. точка из G

Расс. z и строим круг $K_R(z) = \overline{K_R(z)} \subset G$

По условию $\sum u_n(z) \xrightarrow{K_R(z)} f(z)$. По теор. 5.1

$f(z) \in C(K_R)$

1) z произв. контур принадлежит кругу $K_R(z)$

По теор. 5.1 $\int_L f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L u_n(z) dz = 0$
(мн. тура контура)

$f(z) \in C(K_R)$ и имеет в K_R C -свойство

По теор. Морера $f(z) \in A(G)$

2. Пусть произв. $z_0 \in G$ и построим окр. C_R .

$$|z - z_0| = R: C_R \subset G \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \quad z \in C_R$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим ф-цию $\varphi(z) =$

$$= \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \quad \text{эта ф-ция сопр. построенное}$$

$$\sum u_n(z) \xrightarrow{C_R} f(z) \Rightarrow \sum \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \xrightarrow{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$$

По теор. 5.1 $\int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(z_0) \quad \square$$

Теор. 5.2 Определение $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$. Тогда:

1) Если $R = 0$, то ряд

$$(CH) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (*)$$

сходится только в точке $z = z_0$

Абсолютная
(Hadamard)

2) если $R > 0$ (возможно $R = \infty$), то
 ряд (*) сходящийся абсолютно при $|x - x_0| < R$
 и расходящийся при $|x - x_0| > R$

R -радиус сходимости ряда (*)

$K_R(x_0)$ $|x - x_0| < R$ - круг сходимости ряда (*)

$\exists R > 0 \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \quad (**)$

Лемма: В круге $K_R(x_0)$ ряд (*) сходится
 равномерно

Доказ: $\exists D$ -произвольный компакт, вписанный
 в $K_R(x_0)$. Покажем, что $\exists \bar{K}_D(x_0)$ - замкнутой - это:

$D \subset \bar{K}_D(x_0) \subset K_R(x_0)$

1. $D \neq \emptyset \quad \exists M > 0 \quad |x| \leq M \quad \forall x \in D$

$|x - x_0| \leq |x_0| + M = \rho \quad K_\rho(x_0)$

2. $0 < R < \infty$

$\rho(D, \delta_R) = \delta > 0$

2 замкн. мн-ва не пересекающиеся

$\rho = R - \frac{\delta}{2}$



Деление $\delta/2$
 и сражение
 круг
 (так всегда можно)

Ряд (*) сходится абсолютно в $\tau \quad x = x_0 + \rho$, т.е.

сход. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \rho^n$. Этот ряд имеет
 мажорантой Вейерштрассе для ряда (*)
 в круге $K_\rho(x_0) \Rightarrow$ (по признаку Вейерштрасса)
 $\sum C_n (x - x_0)^n \Rightarrow$ и подалгебра ряд (*) сход
 $K_\rho(x_0)$

равномерно на компакте D . $\square$

Следствие

1. $f(x) \in A(K_R(x_0))$ более сильное чем в Вейерштрассе

2. $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} C_n \cdot n(n-1) \dots (n-k+1) (x - x_0)^{n-k} \quad (***)$

3. Все ряды (***) имеют тот же радиус сходимости R

4. Ряд (*) однозначно определяется своей суммой $f(x)$

Получим $x = x_0$ в (**) и в (***)

$C_0 = f(x_0)$

$C_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ | коэф. Тейлора

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ Ряд Тейлора

Пример $\sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n \quad C_n = 1 \quad \forall n \quad R = 1$
 $S_n(x) = 1 + (x - x_0) + \dots + (x - x_0)^n = \frac{1 - (x - x_0)^{n+1}}{1 - (x - x_0)}$

$$|z - z_0| < 1$$

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \frac{1}{1 - (z - z_0)}$$

Разгн: Теор Мейнорса

Теор Мейнорса $\int f(z) \in A(G)$. Если $z \in G$ и $\rho(z_0, \partial G) = r$, то в круге k_r $|z - z_0| < r$ $f(z)$ можно догд представить сходя-
щимся степенным рядом, причем
это представление единственно

Док: Единственность вытекает из следствия 4



То это замечание вытекает

Рис. 4. z круга k_r

Проведем окр γ_ρ $|z - z_0| = \rho$
такой радиус $z \in \text{int} \gamma_\rho$ и

$$\gamma_\rho \subset k_r$$

По формуле Коши $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

Для точек $\zeta \in \gamma_\rho$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \xrightarrow{\int_{\gamma_\rho}} \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

$$\max_{\zeta \in \gamma_\rho} |f(\zeta)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}} = \frac{|z - z_0|}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{\rho}\right)^n$$

Возможен почленно интегрирование по γ_ρ

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (z - z_0)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

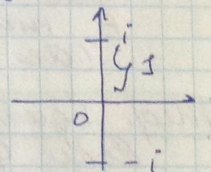
Примеры $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 1) $z_0 = 0$ 2) $z_0 = 1$

$$1. \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad |z| < 1 \quad R=1$$

$$2. z_0 = 1 \quad \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+i} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{(z-1) - (-1)} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1 - \frac{-1}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{(z-1)^{n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+i)^{n+1}} \quad \text{если } \frac{|z-1|}{|1+i|} < 1 \Rightarrow |z-1| < \sqrt{2}$$



$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right) (z-1)^n$$

$$|z-1| < \sqrt{2}$$

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n+1}{2}}} (z-1)^n$$

Раздел: Теор. единственности

Ввод в рассмотрение бескон. множества E , обладающие хотя бы одной конечной предельной точкой z_0 .
 z_0 может не принадлежать E , но должна принадлежать $\bar{E}$

Теор. Единственности (вар 1)

Если ф-ции $f, g \in A(G)$ совпадают на E , то $f = g$ тождественно в G
 (две ф-ции аналитические)

Теор. Единств. (вар 2)

Если $\varphi(z) \in A(G)$ и $\varphi(z) = 0 \quad \forall z \in E$, то $\varphi(z) \equiv 0$ тождественно во всей области

Задачи: Док эквивалентности

Док теор. единств. во втором варианте:

Возьмем из E послед. точку $z_k: z_k \rightarrow z_0$,
 $z_k \neq z_0 \quad \forall k$

Построим круг K_{ρ} $|z-z_0| < \rho \quad z = \rho(z_0, z_0)$

По теор. Мейнорса

$$\varphi(z) = C_0 + C_1(z-z_0) + \dots + C_n(z-z_0)^n \quad \text{Этом ряд}$$

Покажем, что все коэф. C_n равны нулю

$$n=0 \quad C_n = \varphi(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(z_k) = 0 \quad C_n = 0$$

Уже док, что $C_0, \dots, C_n$ равны нулю

Может (*) применим весь

$$\varphi(z) = C_n(z-z_0)^n + C_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots \quad z = z_k$$

$$\varphi(z_k) = 0 = C_n(z_k-z_0)^n + C_{n+1}(z_k-z_0)^{n+1} + \dots$$

$$0 = C_n + C_{n+1}(z_k-z_0) + \dots \quad k \rightarrow \infty$$

$$C_n = 0 \Rightarrow \varphi(z) = 0 \quad \forall z_k$$



$$\varphi(z^*) = 0$$

$$L: z = \gamma(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$$\rho = \rho(L, \partial G) > 0$$

(Замкнутое непрерывн. множество)

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ точками $t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_n = \beta$, так чтобы:

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < \rho \quad i = \overline{1, n}$$

Возьмем в каждой γ равномерн. крив. $\gamma(t)$

$$z_i = \gamma(t_i) \quad i = \overline{1, n}$$

$$z_i \in L \quad |z_i - z_{i-1}| < \rho$$

Шаг 0: Строим круг с центром в z_0 радиуса ρ

$$K_0: |z - z_0| < \rho$$

$$\varphi(z) = 0 \text{ в } K_0$$

Шаг 1: Строим круг $K_1: |z - z_1| < \rho$

$$E_1 = K_0 \cap K_1$$

$$\varphi(z) = 0 \quad \forall z \in E_1$$

(Все точки "линии" предельного $\Rightarrow$ аналогичное действие как в первой части док-ва)

$$\varphi(z) = 0 \text{ в } K_1$$

Шаг 2: Строим круг $K_2: |z - z_2| < \rho$

$$E_2 = K_1 \cap K_2$$

$$\varphi(z) = 0 \quad \forall z \in E_2 \Rightarrow \varphi(z) = 0 \text{ в } K_2$$

— " —

Шаг $n-1$:

$$\varphi(z) = 0 \text{ в кругу } K_{n-1} \quad |z - z_{n-1}| < \rho$$

$$z_n = z^*$$

$$|z_n - z_{n-1}| < \rho \quad \varphi(z_n) - \varphi(z^*) = 0$$

в силу произвольности $z^* \Rightarrow$ то же верно

Раздел: Следствие и применение теоремы единственности

$f(z) \in A(G)$ — функция A , тогда всякая $z_0 \in G$:

$$f(z_0) = A \text{ наз } A\text{-точкой ф-ции } f.$$

$$\text{Если } f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

то говорят, что z_0 есть A -точка ф-ции кратности (порядка) k .

k — кратность (порядок) z_0

$$\text{Разлож Мейнора } f(z) = A + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k +$$

$$+ \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} (z - z_0)^{k+1} + \dots \quad \text{кратность можно опр через это разлож}$$

$k=1$ z_0 — простая A -точка

$k>1$ z_0 — кратная A -точка

Пример 1. $f(z) = \cos z \quad G = \mathbb{C}$

$$z_k = 2k\pi$$

$$f(z_k) = 1 \quad z_k \text{ — } 1\text{-точка ф-ции}$$

$$f'(z) = -\sin z \quad f'(z_0) = 0$$

$$f''(z) = -\cos z \quad f''(z_0) \neq 0$$

z_k — двойная 1-точка

Следствие:

I $f(x) \in A(b)$, $f(x) \neq \text{const}$ Тогда произвольное число A может содержать лишь конечное число A -точек ф-ции f

Док: от противного
 E содержит бесконечное подмножество A -точек
 т.к. E ограничено, то по Б-В E имеет хотя бы одну предельную точку z_0 , принадлежащую K (компакт содержит все свои пред. точки) $\Rightarrow$ z_0 подл-но b , т.к. $K \subset b$

$g(x) = A \Leftarrow \Rightarrow$ она аналит.

$f(x) = g(x) \forall x \in E$

По т. единств. $f(x) \equiv g(x) \equiv A$ в b
 Противоречие, что $f(x) \neq \text{const}$?! $\square$

Но что компакт - это важное условие!
 (т.к. может не быть конечной предельной точки; не оф.). Пример: $\sin x$ $b = \mathbb{C}$
 $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; или $\sin \frac{1}{x}$ $b: 0 < |x| < 1$
 $\pm 1/x = k\pi$ Не возник. против с т. единств.

II $(a, b) \subset \mathbb{R}$, задана ~~ф-ция~~ $\varphi(x)$

$(a, b) \subset \mathbb{R}$, $b \subset \mathbb{C}$ Тогда $\exists$ не более одна ф-ция $f(x) \in A(b)$ и совпадающая с $\varphi(x)$ на (a, b)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$z = x \in \mathbb{R} \quad \sin x$$

$f(x)$ есть аналит. продолжение ф-ции $\varphi(x)$ с (a, b) на b

III (Несуществование аналит. ф-ции с заданными свойствами)

Задача: $\exists$ ли ф-ция $f(x) \in A(k)$, где $k: |x| \leq 1$ такая, что $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$?

$n = 2, 3, \dots$

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \quad n = 2, 3, \dots$$

$$g(x) = x \quad \forall x$$

$$E = \{\frac{1}{n}\} \rightarrow z_0 = 0 \in k$$

$$f(x) \equiv 0 \text{ в } k$$

(по т. единств.)

$$g(-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n} \neq \frac{1}{n}$$

Ответ: Не существует ф-ции не $\exists$

IV (Продолжение соотношения)

$$1. F(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{Углов (аналит.)}$$

$$z = x \quad F(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

По т. единств. $F(x) \equiv 1$ в $\mathbb{C}$

$$2. \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \quad (*)$$

Тогда произв. вытекающее z_2

как const
 $f(z_1) = \cos(z_1 + z_2) \quad g(z_1) = (\cos z_2) \cos z_1 - (\sin z_2) \sin z_1$

Формула (*) верна где $\forall z_1 \in \mathbb{R}$

Можно считать, т.к. $f(z_1) = g(z_1) \quad \forall z_1 \in \mathbb{R}$
 (теор. о продолжении аналит. ф-ции)
 $\Rightarrow f(z_1) = g(z_1)$ на всей $\mathbb{C}$

Можно (*) верна где $\forall$ комплексных z_1 и z_2

Рассмотрим произвольное комплексное z_2

$$F(z_2) = \cos(z_1 + z_2) \quad G(z_2) = (\cos z_1) \cos z_2 - (\sin z_1) \sin z_2$$

F, G - целые ф-ции от z_2

$$F(z_2) = G(z_2) \text{ где } \forall \text{ вещ. } z_2$$

По т. единств. $F(z_2) = G(z_2) \quad \forall \mathbb{C}$

$\Rightarrow (*)$ верна где $\forall$ комплексных z_1 и z_2

Рассмотрим окр $z_0: k_2 \quad 0 < |z - z_0| < R \quad f(z_0)$

$f(z) \in A(k_R)$. Невозможен его разложение

z_0 - изолированная, особая точка (НОТ)
 ф-ции f

Лемма 6 Ряд Лорана и изолирован. особая точка

Ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n$

$$(*) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n}_{\text{Ряд I}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\text{Ряд II}}$$

Ряд (*) сходится в т.х. если в этой точке
 сходится оба ряда: I и II

I ряд имеет радиус сходимости R_1

Если $R_1 = 0$, то ряд (*) не сходится нигде

$[R_1 > 0 \text{ (} R_1 = \infty \text{ можно)} \rightarrow \text{ряд I сходит абсолютно}$
 и нормально в круге $k_1 \quad |z - z_0| < R_1$
 к нек. аналит. ф-ции $f_1(z)$

$$f_1 = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad (**)$$

I ряд (**) имеет конечный рад. сходимости
 $R_2^{-1} (> 0)$. Он сход. абсолютно и нормально
 в $k_2 \quad |z - z_0| < R_2^{-1}$

Ряд II сход. абсолютно и норм. на линии k_2 :

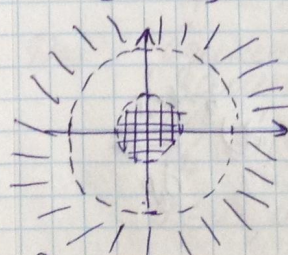
$|z - z_0| > R_2$ к нек. аналит. ф-ции f_2

$$R_2 > R_1$$

$$R_1 = R_2 = R$$

Ряд (*) может сходиться
 лишь в точках
 окружности

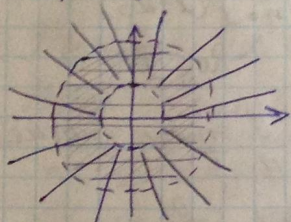
$$|z - z_0| = R$$



Ряд (*) не сход. нигде

$$R_1 > R_2$$

$$R_2 < |z - z_0| < R_1$$



В некотором секторе под лорана сходится абсолютно и равномерно к аналит. ф-ции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ в круговой кольце

$$R_2 < |z - z_0| < R_1$$

Замечание о единственности: Ряд Лорана с ненулевыми коэффициентами сходится, $D: R_1 < |z - z_0| < R_2$ определяется единственными образцами, своей суммой $f(z)$

одно
кольца

$$D_p: |z - z_0| = \rho \quad R_2 < \rho < R_1$$

$$(***) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \xrightarrow{D_p}$$

Рекурс прощив $k \in \mathbb{Z}$ и умножив обе части $(***)$ на $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} (z - z_0)^{-k-1}$

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho^{k+1}} \quad z = \rho$$

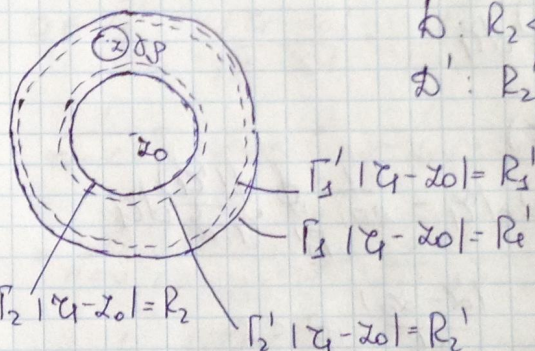
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{D_p} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{D_p} c_n (z - z_0)^{n-k-1} dz \xrightarrow{D_p}$$

Полученное интеграл по D_p

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{D_p} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{2\pi i} \oint_{D_p} \frac{dz}{(z - z_0)^{n+k+1}}$$

$$\oint_{D_p} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{D_p} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} \quad k = 0, 1, \dots$$



$$D: R_2 < |z - z_0| < R_1$$

$$D': R_2' < |z - z_0| < R_1'$$

Лемма Лорана: Ф-ция $f(z)$ аналит в кольце $D: R_2 < |z - z_0| < R_1$ разлагается в D в сходящуюся ряд Лорана по степеням $z - z_0$, причем это разл. единств.

Док: Единственность разложения док. в "Замечание о единственности".
Фикс. $z \in D$ построим кольцо D' : $R_2' < |z - z_0| < R_1'$ так, чтобы $D' \subset D$ и $z \in D'$, и окр $D_p: |z - z_0| = \rho: D_p \subset D'$

Рассмотрим область G с составной границей $\Gamma_1' \vee \Gamma_2' \vee \Gamma$ и функцию

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \in A(G)$$

По т. о. составленной контуре

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$\Downarrow$
 $f(z)$

$$(+)\ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\bullet \ \zeta \in \Gamma_1' \quad \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{R_1} = \theta < 1$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \xrightarrow{R_1}$$

(матрица, членов больше со знаком $\ominus$)

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \xrightarrow{\Gamma_1'}$$

Полученное имеет по Γ_1'

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

$$\text{где } C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$$\bullet \ \zeta \in \Gamma_2' \quad \frac{|\zeta - z_0|}{|z - z_0|} = \frac{R_2'}{|z - z_0|} = \mu > 1$$

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - z_0 - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{n+1}}{(z - z_0)^n} \xrightarrow{\Gamma_2'}$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{n-1} (z - z_0)^{-n} \xrightarrow{\Gamma_2'}$$

Полученное имеет по Γ_2'

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (z - z_0)^{-n}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta$$

Подстановка обоих рядов в (+) получаем

ряд Лорана где $f(z)$ $\square$

Задача $\exists \delta_R \quad |z - z_0| = R \quad R_2 < R < R_1$

тогда
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

классификация точек особых точек

$\mathbb{D}_R: 0 < |z - z_0| < R$

$f(z) \in A(\mathbb{D})$

По теор. Лорана $f(z)$! образом разлаг.
в ряд Лорана

(*)
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

$z \in \mathbb{D}_R$

↑
главная часть
Правильная часть

Возможно 3 случая

1. Ряд (*) не содержит членов с отриц. степенями $z - z_0$, т.е. ряд (*) превращается в степенной ряд

z_0 - устранимая особая точка (УОТ)
ф-ции $f(z)$

2. Ряд (*) содержит конечное число членов с отриц. степенями $z - z_0$

z_0 - наз. полюсом ф-ции $f(z)$

3. Ряд (*) содержит бесконечное число членов с отриц. степенями $z - z_0$

z_0 - существенная особая точка (СОТ)
ф-ции $f(z)$

Теорема 1 След. 3 показывающие эквивалентны

1. z_0 есть УОТ ф-ции $f(z)$

2. $\exists$ конечный предел ф-ции f :
 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$

3. $f(z)$ ограничена в нек. окрестности точки z_0

Док: $1 \rightarrow 2$

$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \quad \forall z \in \mathbb{D}_R$

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$

$2 \rightarrow 3$

Очевидно из 1 курса

$3 \rightarrow 1$

$\forall \delta < |z - z_0| < \delta \quad \forall z \in \mathbb{D}_R$

$\exists M > 0: |f(z)| \leq M \quad \forall z \in U$

$\exists \delta_p: |z - z_0| \leq \delta_p: \delta_p < \delta$

Тогда $C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

$$|C_n| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \mathcal{D}} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} \leq \frac{M}{\rho^{n+1}} \quad n=0, \pm 1, \dots$$

$$|C_{-m}| \leq M \rho^m \quad m \in \mathbb{N} \quad m=1, 2, \dots$$

При $\rho \rightarrow 0$ получаем $C_m = 0 \quad m=1, 2, \dots$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in \mathcal{D}_R$$

z_0 - УОТ $f(z)$ $\square$

Примеры:

1. z_0 - УОТ где $f(z) \Rightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0$

Если $f(z_0) \neq C \rightarrow$ Перенос. $f(z_0) = C \rightarrow$ исчезает особенность.

2. Если известно УОТ $f(z)$ не явл. УОТ, то $f(z)$ не ограничена в $\forall$ окрестности точки z_0

Полное:

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{C_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{C_{-1}}{z-z_0} +$$

$$C_{-m} \neq 0 \quad + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \quad (*)$$

m - порядок (кратность) полюса z_0

$m=1$ z_0 - простой полюс

$m>1$ z_0 - кратный полюс

Теор 6.2 Метка $z_0 \Leftarrow$ является полюсом $f(z)$, когда $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0$

Док: $\Rightarrow$ z_0 - полюс где $f(z)$ и верно соотношение $(*)$

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} [C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \dots + C_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \dots] \quad \ominus$$

$\varphi(z) = [\dots]$ именно пред $\Rightarrow$ Анализ ф-цы

$$\varphi(z) \in A(\mathcal{D}_R)$$

$$z \rightarrow z_0 \quad \varphi(z) \rightarrow C_{-m} \neq 0$$

$$\ominus \quad \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} \rightarrow \infty$$

$$z \rightarrow z_0$$

$$\Leftarrow \quad f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} \quad \varphi(z) \in A(\mathcal{D}_R) \\ \varphi(z_0) = C_{-m} \neq 0$$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

$$g(z) = \psi(z)(z-z_0)^{+m}, \text{ где } \psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$$

т.к. $\varphi(z_0) \neq 0$

z_0 - нулевая кратности m для $f(z)$

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{C-m} \neq 0$$

$z_0 = 0$ та же кратность для $g(z)$

~~Теорема 6.2~~ ~~НОТ & нулевая кратность~~ ~~$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$~~ ~~$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \infty$~~

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \text{ Рассмотрим } g(z) = \frac{1}{f(z)} \quad z \in U, \quad f(z) \neq 0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0 \Rightarrow z_0 - \text{НОТ для } g \text{ (теорема 6.1)}$$

Определим $g(z)$ в z_0 $g(z_0) = 0$

Может $g(z)$ анализ. в некоторой окр. U и z_0 - нуль порядка m ($m \geq 1$) для $g(z)$

$$z \in U$$

$$g(z) = d_m (z - z_0)^m + d_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots = (z - z_0)^m \cdot$$

$$[d_m + d_{m+1} (z - z_0) + \dots] = (z - z_0)^m \varphi(z)$$

$$\varphi \in A(U) \quad \uparrow \quad \varphi(z)$$

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\varphi(z)} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^m}$$

$\varphi(z)$ - анализ. в некот. окр. U z_0

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots$$

Подставим

$$f(z) = \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots \quad a_0 \neq 0$$

$$a_0 = \varphi(z_0) = \frac{1}{\varphi(z_0)} = \frac{1}{d_m} \neq 0$$

z_0 - нулевая кратности m для $f(z)$ $\square$

Теорема 6.3 z_0 - НОТ $\Leftrightarrow$ является нулевой кратности m для $f(z)$, когда z_0 есть нуль порядка m для ф-ции $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, определенной нулем в z_0 .

Док: в $\Leftarrow$ применяем теор. $\square$

Следствие, что z_0 - НОТ для $f(z)$

$$\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

Теорема Кохана z_0 - НОТ для $f(z)$. Тогда для $\forall$ окр. A (конечного или бесконечного) найдется послед. точек $\{z_n\}$, что сама это послед. сход к z_0 и $f(z_n) \rightarrow A$ ($\{z_n\} \subset A$ - послед. Кохана)

Док: 1. $A = \infty$ для $f(z)$ теор. в $\forall$ окр. U z_0 найдется послед. m z_n такие что $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ и $|f(z_n)| > n$

z_n - ∞ -послед. Кохана

2. $A \neq \infty$ Док от противного $\exists A$ -послед. Кохана не существует

Многа $\exists$ окр U_δ , z_0 $0 < |z - z_0| < \delta$ и $\delta > 0$: $|f(z) - A| > \delta$

Положим $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A} \in A(U_\delta)$ и $|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} < \frac{1}{\delta}$

z_0 - СДГ где φ . Тогда по теор 6.1 $\exists$ некоторый $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = a_0$

Квадрат a_0 , возмем предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z_n) - A} = 0 = a_0$

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - A} = 0 \sim \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \sim z_0 -$

полюс где $f(z)$ (6.2) ?!
 СДГ по полюс ?!

Противор доказывает $\exists$ А-полюс сохоткого

Пример $f(z) = e^{1/z}$ $z_0 = 0$

Раслож: $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} +$

Фолтно сходится на всей компл. плоскости

(или теор Коши-Адамара $R = \infty$)

$z \neq 0$ $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} +$

Разлом отной нуле
 Бесконечно много чисел с отриц. степенью $(z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-n}, \dots)$

$z = 0$ - СДГ где $e^{1/z}$

$A = \infty$ $\exists z_n' = \frac{1}{n}$ $f(z_n') = e^n \rightarrow \infty$

$A = 0$ $z_n'' = -\frac{1}{n}$ $f(z_n'') = e^{-n} \rightarrow 0$

$A \notin \{0, \infty\}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ $f(z_n) = A \sim e^{1/z_n} = A$

$\frac{1}{z_n} = \ln A \sim z_n = \frac{1}{\ln A}$

$\ln A = \ln |A| + i \arg A$

$\ln A = \ln A + 2\pi i n$ $n \in \mathbb{Z}$

$z_n = \frac{1}{\ln A + 2\pi i n}$ $n = 1, 2, \dots$ А-полюс Сохоткого $f(z_n) = A$

Теор Пикара (без док-ва, где означением)
 (добавить)

$\exists z_0$ - СДГ где $f(z)$. Тогда где всякого конечного числа A (с единственными возм. мн. значениями) некоторая пойма А-точек ф-ции f , сходящаяся к т. z_0

(исключ $A = 0$ (как в примере) но не всегда $\exists$ где кант)

Задача: Проверить, что где ф-ции $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ и т. $z_0 = 0$ исключ. значение $f(z)$ существует.

Особенности в бесконечно удаленной точке

$$f(z) \in A(\infty)$$

$$D: |z| > R \quad z_0 = \infty \text{ нест. где } f$$

$$f(z) \rightarrow g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$z_0 = \infty \rightarrow \zeta_0 = 0$$

[Анал]: $z_0 = \infty$ экв. ГОТ где $f(z)$, помощью или с ГОТ
в зависимости от того будет ли то
 $\zeta_0 = 0$ экв. ГОТ, помощью или с ГОТ
где $g(\zeta)$

$$\zeta_0 = 0 \text{ или } z_0 = \infty \quad g(\zeta)$$

ГОТ

$$g(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_m \zeta^m + \dots$$

Поиск порядка m

$$g(\zeta) = a_{-m} \zeta^{-m} + \dots + a_{-1} \zeta^{-1} + a_0 + \dots + a_1 \zeta + \dots \quad a_{-m} \neq 0$$

сост

$$g(\zeta) = \dots + a_{-m} \zeta^{-m} + \dots + a_{-1} \zeta^{-1} + a_0 + \dots + a_1 \zeta + \dots$$

$$\zeta_0 = 0 / z_0 = \infty$$

$$f(z)$$

соответствие

ГОТ

$$f(z) = a_0 + a_1 \frac{1}{z} + \dots + a_m \frac{1}{z^m} + \dots$$

Поиск порядка m

$$f(z) = a_{-m} z^m + \dots + a_{-1} z + a_0 + \dots + a_1 z^{-1} + \dots \quad a_{-m} \neq 0$$

сост

$$f(z) = \dots + a_{-m} z^m + \dots + a_{-1} z + a_0 + \dots + a_1 z^{-1} + \dots$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

правильная часть левая часть

1. $z_0 = \infty$ - ГОТ где $f(z) \Leftrightarrow \exists$ конечный $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$
 $\Leftrightarrow f(z)$ ограничен в нек. окрестности

бесконечно удаленной точки

2. $z_0 = \infty$ - полюс где $f(z) \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$

3. $z_0 = \infty$ - сост где $f(z) \Rightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ (ни конечного, ни бесконечного)

Пример: 1. $f(z) = \sin^2 \frac{1}{z} \quad \nexists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$

$$z_0 = \infty \text{ ГОТ где } f(z)$$

Пример $f(z) = 0 \quad z_0 = \infty$ глобальной нуль где $f(z)$

2. $e^z = f(z)$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

как лорансовское разлож.

$$z_0 = \infty \text{ сост где } f(z) = e^z$$

Лемма 7 Вокруг и их принадлежащих

$f(z) \in A(\infty)$ за исключением некоторого числа нест. (изолир особ. точек)

(Только изолир о.т. ! Никаких групп в окр. нест.)

Сопоставление о контурах: Говорят о контурных интегралах $\oint f(z) dz$ всегда предполагают что Γ не проходит $\oint$ через особые точки $f(z)$

z_0 - особая точка $f(z)$, тогда в нек окрестности U z_0 $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана (назовем эту окр. D)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (*)$$

Опрег: Коэффициент $f(z)$ относит точки z_0 называется коэффициент c_{-1} в разложении $(*)$

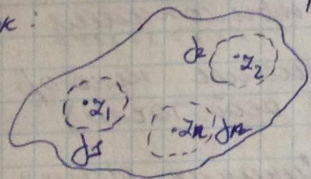
Проведем окр. $\oint$ $|z - z_0| = \rho \subset D$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(z) dz \quad ; \quad \text{res}[f(z), z_0] - \text{остаток в точке } z_0$$

Теор о вычетах: $z_1, \dots, z_n$ - все особые точки ф-ции $f(z)$, находящиеся внутри Γ тогда:

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z), z_k]$$

Док:



Рассмотрим окр U_k :
 $|z - z_k| = \rho \quad (k = \overline{1, n})$

так, чтобы
 $U_k \subset \text{int } \Gamma \quad \forall k \quad f_i \in \text{ext } U_j \quad i \neq j$

По теор о составлении контура

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = \oint_{\Gamma_1^+} f(z) dz + \dots + \oint_{\Gamma_n^+} f(z) dz =$$

$$= 2\pi i [\text{res}[f(z), z_1] + \dots + \text{res}[f(z), z_n]]$$

"+" означает путь в положительном направлении. $\odot$

z_0 - простая особая точка $f(z)$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$

$$f(z)(z - z_0) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \dots$$

$$z \rightarrow z_0$$

$$c_{-1} = \text{res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$$

Предположим что $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$

φ, ψ - аналитич в окр z_0 $\varphi(z_0) \neq 0$

$$\psi(z_0) = 0 \quad \psi'(z_0) \neq 0$$

$$\varphi(z_0) = \varphi'(z_0)(z - z_0) + \frac{\varphi''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \dots$$

$$\text{res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)(z - z_0)}{\psi'(z)(z - z_0) + \frac{\psi''(z)}{2}(z - z_0)^2 + \dots} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

z_0 - нуль порядка m

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

$$f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + c_0(z-z_0)^{m-1} + \dots$$

Прогресс m-й раз

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-z_0)^m] = (m-1)! c_{-1} + \dots + m(m-1) \cdot c_0(z-z_0) + \dots$$

$$z \rightarrow z_0$$

$$c_{-1} = \text{res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-z_0)^m]$$

$$m=1$$

Пример: Вокруг особой точки дисконтинуально уменьшилась

$$f(z) \in A(\mathbb{D})$$

$$\mathbb{D}: |z| > R \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Аналог: Вокруг $f(z)$ особой $z_0 = \infty$ наз сделано
 $-c_{-1}$

$$\text{конечн } z_0 - \text{гот } \text{же } f(z) \quad \text{res}[f(z), z_0] = 0$$

$$\text{Если } z_0 = \infty - \text{гот } \text{же } f(z) \text{ то } \text{res}[f(z), z_0] \text{ не нуль}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad \text{res}[f(z), z_0] = -1 \neq 0$$

Тео о наличии суммы вычетов

$\int f(z)$ имеет в различ комплексной плоск. только целое число око точек.
 Если $z_1, \dots, z_n$ - все конечные особые точки
 ϕ -где $f(z)$ и $z_0 = \infty$, то

$$\sum_{k=1}^n \text{res}[f(z), z_k] = 0$$

Док: Проверим $\oint_{\gamma_R} f(z) dz$ $|z| = R$ $R \rightarrow \infty$. выбор выбора всех полюсов и нулей и особых точек $z_1, \dots, z_n$
 По теор о вычетах $\oint_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z), z_k] + \oint_{\gamma_R^+} f(z) dz$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R^+} f(z) dz$$

$$\oint_{\gamma_R^+} f(z) dz = 2\pi i (-\text{res}[f(z), z_0]) \quad (++)$$

Вот также $(++)$ из $(+)$ $\rightarrow$ это и требуется

Замеч: Тео о налич. суммы вычетов применяется где всех разг. ф-ц

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$\text{Пример } \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^2+3)(z^2-1)^2}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+3)(z^2-1)^2}$$

$$z_1, \dots, z_n \quad z_0 = 0 \quad z_0 = \infty$$

и $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\text{Im } z \geq 0$

2. Для всех точек действительной оси x из $\bar{P}_+$

(обозн $P_+ : \text{Im } z > 0$

$\bar{P}_+ : \text{Im } z \geq 0$)

справедлива оценка:

$$|f(x)| \leq \frac{\mu(x)}{|x|}$$

$\mu(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ $x \in \bar{P}_+$

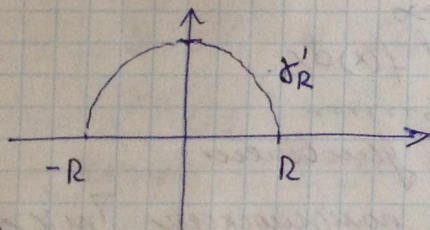
Тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ имеет смысл в смысле

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(x), z_k]$$

Док-во: $\int$ число $R > 0$: все особые точки z_k :

$$|z_k| < R$$

Построим контур $\Gamma_R = \delta_R' \cup [-R, R]$



$$\oint_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\delta_R'} f(z) dz =$$

$$(*) = \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z), z_k]$$

$$\left| \int_{\delta_R'} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \delta_R'} |f(z)| \cdot \pi R \leq \frac{\max_{z \in \delta_R'} \mu(x) \pi R}{R} \leq$$

$$\leq \pi \max_{z \in \delta_R'} \mu(x) \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty$$

$$\text{Переходя к пределу при } R \rightarrow \infty \text{ получим } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(x), z_k]$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$$

Теор. 2. $\int f(x)$ удовлетв. условиям 1 и 2

$f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и $x \in \bar{P}_+$. Тогда для любого $a > 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$ имеет смысл в смысле

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[e^{iax} f(x), z_k]$$

Лемма Морзе $\int f(x)$ непрерывна в $|x| \geq R_0 > 0$

$x \in \bar{P}_+$. Если $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$; $x \in \bar{P}_+$, то

$$\forall a > 0 \Rightarrow \int_{\delta_R'} e^{iax} f(x) dx \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty$$

Док-во леммы: Построим $\mu_R = \max_{z \in \delta_R'} |f(z)|$

$$\mu_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

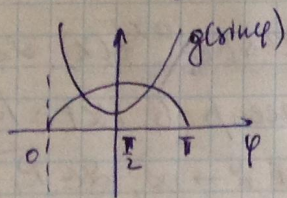
$$|Y| \leq \int_{\delta_R} |e^{iax}| |f(x)| d\sigma \leq \mu_R \int_{\delta_R} |e^{iax}| d\sigma$$

$$\begin{cases} \delta_R: z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi) & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ d\sigma = R d\varphi \end{cases}$$

$$\leq \mu_R R \int_0^\pi |e^{iax}| d\varphi =$$

$$\begin{cases} ia z = -aR \sin \varphi + i aR \cos \varphi \\ |e^{iax}| = e^{-aR \sin \varphi} \end{cases}$$

$$= \mu_R R \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi =$$



$$= 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \leq$$

$$\varphi \in [0, \pi/2]$$

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$$

$$-aR \sin \varphi \leq -\frac{2}{\pi} aR \varphi$$

$$\leq 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi} aR \varphi} d\varphi = \mu_R R \frac{\pi}{aR} \left(e^{-\frac{2}{\pi} aR \varphi} \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{a} \mu_R (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow Y \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \square$$

Фон-бо неоп: Рассмотрим $\Gamma_R = [-R, R] \cup \delta_R^+$
 Неоп о вращении $\oint_{\Gamma_R} e^{iax} f(x) dx = \int_{-R}^R e^{iax} f(x) dx +$
 (**)

$$\int_{\delta_R^+} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [e^{iax} f(x), z_k]$$

→ по n морфизма

B (**), переходим к пределу $R \rightarrow \infty$

$$a > 0. \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx =$$

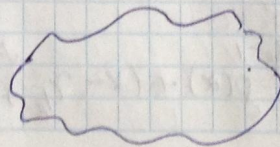
$$= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [e^{iax} f(x), z_k] \quad \square$$

Полуприведенные вращающиеся функции

Дополнение к теореме о контурах:

1. Все особые точки $f(x)$ в обл G суть полюса
2. Всякая рассматрив. контур не проходит через полюса и нули ф-ции $f(z)$

$$\Gamma \subset G$$



z_1, z_2 - полюса ф-ции f
 внутри контура

$$f(z) \neq \text{const}$$

их крайности $z_1, \dots, z_p$

$z_1, \dots, z_n$ - нули внутри Γ

$\beta_1, \dots, \beta_n$ - их кратности

$N_f(\Gamma)$ - полное число нулей f внутри Γ

$P_f(\Gamma)$ - полное число полюсов f внутри Γ

Теорема о логарифмическом вычете

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma)$$

логарифмический
вычет

Доказательство: $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

Всё те точки $\varphi(z)$ - нули и полюсы функции f

Покажем, что каждая из этих точек есть простой полюс для φ

Возле z_k $f(z)$ можно записать в виде

$$(1) \quad f(z) = (z - z_k)^{\beta_k} \cdot g(z)$$

$g(z) \in A$ в окр. z_k и $g(z_k) \neq 0$

Диф. (1)

$$f'(z) = \beta_k (z - z_k)^{\beta_k - 1} g(z) + (z - z_k)^{\beta_k} g'(z)$$

$$= \beta_k (z - z_k)^{\beta_k - 1} h(z) \quad (2)$$

$$h(z) = g(z) + \frac{1}{\beta_k} (z - z_k) g'(z) \quad h(z_k) = g(z_k) \neq 0$$

Далее (2) и (1) $\Rightarrow$

$$\varphi(z) = \frac{\beta_k}{(z - z_k)} + \psi(z)$$

$\psi(z) \in A$ в окр. z_k

z_k - простой полюс для φ

$$\beta_k = \text{res}[\varphi(z), z_k]$$

В окр. полюса z_m $f(z)$ имеет вид

$$(3) \quad f(z) = \frac{r(z)}{(z - z_m)^{d_m}}; \quad r(z) \in A \text{ в окр. } z_m$$

$$r(z_m) \neq 0$$

$$f'(z) = -\frac{d_m}{(z - z_m)^{d_m + 1}} r(z) + \frac{r'(z)}{(z - z_m)^{d_m}}$$

$$= -\frac{d_m}{(z - z_m)^{d_m + 1}} S(z)$$

$$S(z) = r(z) - \frac{1}{d_m} (z - z_m) r'(z)$$

$$S(z_m) = r(z_m) \neq 0$$

$$(3) / (4) \Rightarrow \varphi(z) = -\frac{d_m}{(z - z_m)} + \psi(z)$$

$\xi(x)$ - анализ в окр z_m

z_m - простой полюс где $\varphi(x)$

$\Rightarrow z_m = \text{res}[\varphi(x), z_m]$

По т. о. вытекает

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_P} \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^n \text{res}[\varphi(x), z_k] +$$

$$+ \sum_{l=1}^p \text{res}[\varphi(x), z_l] = \sum_{k=1}^n \rho_k - \sum_{l=1}^p d_l =$$

$$= N_P(r) - P_P(r) \quad \square$$

$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ - логарифм производная $f(x)$

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

$$\ln z = \ln |z| + i \text{Arg} z$$

$z \neq 0$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

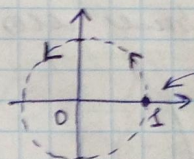
Решие $k \in \mathbb{Z}$ и $\ln_k z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k)$

однозначная ветвь
однозначная ф-ция $\ln_k z$
снова однознач. ф-ция

$$\ln z = \ln_0 z$$

$$(\ln_k z)' = \frac{1}{z}$$

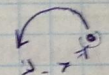
Опр Точка z_0 называется точкой ветвления многозначной ф-ции $F(z)$ если $\exists$ такая окрестность этой точки, что обход z_0 в этой окрестности по $\neq$ контуру приводит к различным значениям функции $F(z)$ другой ветви



$$\ln z$$

$$\ln_1 z = 0$$

$$\ln z = -i \arg z$$



следующий по порядку



$$4\pi i \text{ (после 2-го обхода)} = \ln_2 z$$

Никогда не возвращаемся к началу

0 - логарифмическая Γ ветвление (если не изменился напр. обхода, то никогда не возвращаемся к началу)

Алгебраическая Γ ветвь (если изменился напр. обхода)

$$\ln z \rightarrow \ln_1 \rightarrow \ln_2 \rightarrow$$

Обобщенная формула Коши-Мордана
[нуль во всем] $\oint_{\gamma} f(z) dz$, при этом

известна многозначная первообразная $F(z)$ где $f(z)$

Расс произв. т. $z_0 \in \Gamma$ и произв. значение первообразной в этой точке ($F_H(z_0)$) совершили обход Γ вправо в каждой точке $z \in \Gamma$ получили значение φ -функции F из единственного непрерывного изменения первообразной вдоль Γ .

$\int_{\Gamma} F_k(z_0)$ - значение F с которой мы возвращаемся в т. z_0 . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F_K(z_0) - F_H(z_0)$$

$$F(z) = \int_{\Gamma} f(z)$$

$$F_H(z_0) = \ln |f(z_0)| + i \varphi_H$$

$$F_K(z_0) = \ln |f(z_0)| + i \varphi_K$$

Т. о пог. формула: $N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz =$

$$= \frac{1}{2\pi i} [\varphi_K - \varphi_H] = \frac{1}{2\pi i} \text{Var Arg } f(z)$$

(общая формула)
приращение аргумента

φ - порядок кривой; $w = f(z)$ $z \in \Gamma$, отнесет $w_0 = 0$

$f(z)$ в положительн. напр. 2π
в отрицат. напр. -2π

$$\text{Var Arg } f(z) = 2\pi \Delta$$

Теор (формула формулирована)

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = 0$$

Следствие

Γ - ориентирован; $f(z) \in A(\Gamma)$. Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$, то

$$N_f(\Gamma) = 0$$

Мног. Рунге

Γ - ориентирован; $f(z), \varphi(z) \in A(\Gamma)$

$\Gamma \subset \mathbb{C}$. Положим $F(z) = f(z) + \varphi(z)$

Если $^{\circledast} |f(z)| > |\varphi(z)| \quad \forall z \in \Gamma$, то

$$N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$$

Пример: Найти все корни ур.

$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0 \quad \text{выберем } |z| = 1.$$

$$f(z) = -4z^5 \quad \varphi(z) = z^8 + z^2 - 1$$

$$F(z) = 0$$

$$\Gamma: |z| = 1$$

$$|f(z)| = 4 \quad |\varphi(z)| \leq |z^8| + |z^2| + 1 = 3$$

$$N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$$

$$-4x^5 = 0$$

$$N_F(\Gamma) = 5$$

$$N_f(\Gamma) = 5$$

Доказательство: $U_g(x) \Rightarrow f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Gamma$

$$F(x) = f(x) \left[1 + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \right] = f(x) g(x)$$

$$\text{Arg } F(x) = \text{Arg } f(x) + \text{Arg } g(x)$$

$$\text{Var Arg } F(x) = \text{Var Arg } f(x) + \text{Var Arg } g(x)$$

$$g(x) = 1 + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \quad x \in \Gamma$$

$$|g(x) - 1| = \left| \frac{\varphi(x)}{f(x)} \right| < 1$$

При отходе $w = g(x)$

$\varphi = 0$ кривая не выходит за пределы круга

$$N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$$

Основная теорема алгебры

$\exists P(x)$ - многочлен степени $n \geq 1$

Тогда $P(x)$ имеет в $\mathbb{C}$ n корней (с учетом кратности)

Доказательство: $P(x) = \underbrace{a_0 x^n}_{f(x)} + \underbrace{a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}_{\varphi(x)}$

Так $\frac{\varphi(x)}{f(x)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то для всех достат.

выбранных R верно неравенство

$$|\varphi(x)| < |\varphi(x)| \quad \forall x \in \Gamma_R \quad |\Gamma| = R$$

По теореме Римана:

$$N_P(\Gamma_R) = N_f(\Gamma_R)$$

$$a_0 x^n = 0 \Rightarrow N_f(\Gamma_R) = n$$

$$N_P(\Gamma_R) = n$$

Теорема об отображении: $f(x) \in A(G)$, $f(x) \neq \text{const}$

Тогда $D = f(G)$ так же является областью

Доказательство: $\exists w_1, w_2$ - произв. точки из D , z_1, z_2 - произвольные их прообразы

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2 \quad G \text{ - область} \Rightarrow$$

z_1, z_2 можно соединить кривой

$z = \alpha(t) \in [a, b]$ не выходящей из G

Тогда кривая $w = f[\alpha(t)] = \mu(t)$

$t \in [a, b]$ соединит w_1 и w_2 и не

выходит за пределы D

$\exists w_0$ - произв. из D , z_0 - произв. ее перво-

образная в G , то $f(z_0) = w_0 \quad z_0 \in G$

Покажем, что w_0 входит в D вместе с некоторой ее окр $|w - w_0| < \mu$

Рассмотрим на плоскости z замкнутый круг $\bar{D}_\rho$ $|z - z_0| \leq \rho$: 1) $\bar{D}_\rho \in G$
2) z_0 - единств. w_0 -точ. в круге $\bar{D}_\rho$



$$f(z) = w$$

$$f(z_1) = w_0$$

$$f(z_2) = w_0$$

$$f(z_3) = w_0$$

Тогда послед. конечная $E = \{z_n\}$

$$f(z_n) = w_0$$

$$z_n \rightarrow z_0$$

$$f(z) \Rightarrow g(z) = w_0$$

$$\mu = \max_{z \in D_\rho} |f(z) - w_0| > 0$$

$$D_\rho: |z - z_0| = \rho$$

$$k_\mu: |w - w_0| < \mu$$

$$k_\mu \subset D$$

$$\exists w' \text{ - произв. т. из } k_\mu \text{ т.е. } |w' - w_0| < \mu$$

$$f(z) = w_0 \quad N_{f(z) - w_0}(D_\rho) > 0$$

$$f(z) = w' \quad N_{f(z) - w'}(D_\rho)$$

$$f(z) - w' = [f(z) - w_0] - [w' - w_0], \quad z \in D_\rho$$

$$|f(z) - w_0| \geq \mu$$

$$|w' - w_0| < \mu$$

Но по лемме Руше: $N_{f(z) - w'}(D_\rho) = N_{f(z) - w_0}(D_\rho) > 0$

$$\exists z': |z' - z_0| < \rho$$

$$f(z') = w' \quad \#$$

Приведем максимумный принцип
оп-геев максимум принцип

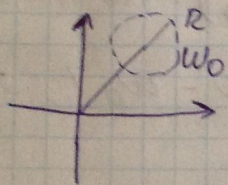
$\exists f(z) \in A(G)$ и $f(z) \neq \text{const}$. Тогда на любой точке из G $|f(z)|$ не может достигать максимума. Если G -окр. области и $f(z) \in C(\bar{G})$, то $|f(z)|$ достигает своего макс на ∂G

Док: От произвольного $\exists |f(z)|$ достигается макс в т. $z_0 \in G$, т.е.

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in G$$

Положим $w_0 = f(z_0)$. По теор. об
образе области

$$\exists k_\mu: |w - w_0| < \mu: k_\mu \subset D_f(z)$$



$\forall$ внутр. точке w
радиус r имеет
образ $D_f(z)$

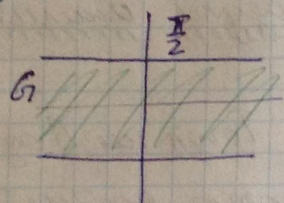
$$|w_0| = |f(z_0)|$$

Это противор. доказат. универс.

Все утверждения вытекают из той теор.
Вейерштрасса о кр. ф-ции на компакт.

Пример

$$f(z) = e^z$$



$$z = x + i \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$e^z = e^x e^{i \frac{\pi}{2}} = i e^x$$

$$|e^z| = 1$$

Примеры кр. функции

$$\exists f(z) \in A(G); f(z) \neq \text{const}; f(z) \neq 0 \forall z \in G$$

Можно ли в любой точке из G $|f(z)|$

не может достигать максимума. Если

G кр. область и $f(z) \in C(\bar{G})$ то мин

$|f(z)|$ достигается на ∂G

Док: Положим $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Ф-ция $g(x)$

корректно опрег и явл. аналит. в G

Принцип мин где $f(x) \sim$ принцип макс
где $g(x)$ $\square$

Для теор. Вейерштрасса (о кр. аналит.
ф-ции)

$\exists$ кр. область

$$u_n(z) \in A(G) \cap C(\bar{G}) \quad n=1, 2, \dots$$

$$\text{Если } \sum u_n(z) \xrightarrow{\partial G}, \text{ то } \sum u_n(z) \xrightarrow{\bar{G}}$$

Док: Для того $\sum u_n(z)$ выполнено кр.т.
равномерно сходится на границе

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \left| \sum_{k=N+1}^{n+p} u_k(z) \right| < \varepsilon$$

$$\forall n \geq N \quad \forall p > 0 \quad \text{и} \quad \forall z \in \partial G \quad \psi_p(z)$$

$$\psi_p(z) \in A(G) \cap C(\bar{G}) \quad \text{из принципа}$$

макс. минимума $\Rightarrow$

$$|\psi_p(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in \partial G \Rightarrow$$

$$|\psi_p(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in \bar{G}$$

Для $\sum u_n(z)$ выполнено кр.т. камен

правильный выход на $\bar{b}$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = \bar{b}$ □

Всего 22

Конец